Forblad

Spændingsbestemmelse i Murpiller

K.F.W.Askøe

Tidsskrifter

BSM 10-4 Bygningsstatiske Meddelelser

1938

SPÆNDINGSBESTEMMELSE I MURPILLER

AF *K. F. W. ASKØE*

En lodret Murpille af Længde l, Bredde b og Højde h, der er opmuret med vandrette Skifter af et Materiale uden Trækstyrke, som tilfredsstiller *Hooke*'s Lov, er paavirket centralt af Kraften N og har ved en tilfældig Udbøjning naaet Brudstadiet med Brudspænding σ_B og Nullinieafstand c, hvor en Del af Pillens Længde har gabende Revner mellem den uforandrede krumme Nullinie og Pillens konvekse Side, saaledes som stærkt overdrevet er antydet i Figuren.

Kaldes Nullinieafstanden x i Højde y over Brudstedet, hvor Fugen danner en lille Vinkel α med sin oprindelige Stilling, har man umiddelbart Enhedsforkortelserne:

$$\varepsilon_B = \frac{\sigma_B}{E} = \frac{2N}{cbE},$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{2N\cos\alpha}{x\sec\alpha\, bE} \backsim \frac{c\,\varepsilon_B}{x}$$

og

$$\alpha \cdot d\alpha \backsim \frac{1}{3}\frac{dx}{du}\cdot d\alpha = \frac{\varepsilon\cos 3\alpha}{3x}\cdot dx \backsim \frac{c\,\varepsilon_B}{3x^2}\cdot dx,$$

hvoraf ved Integration:

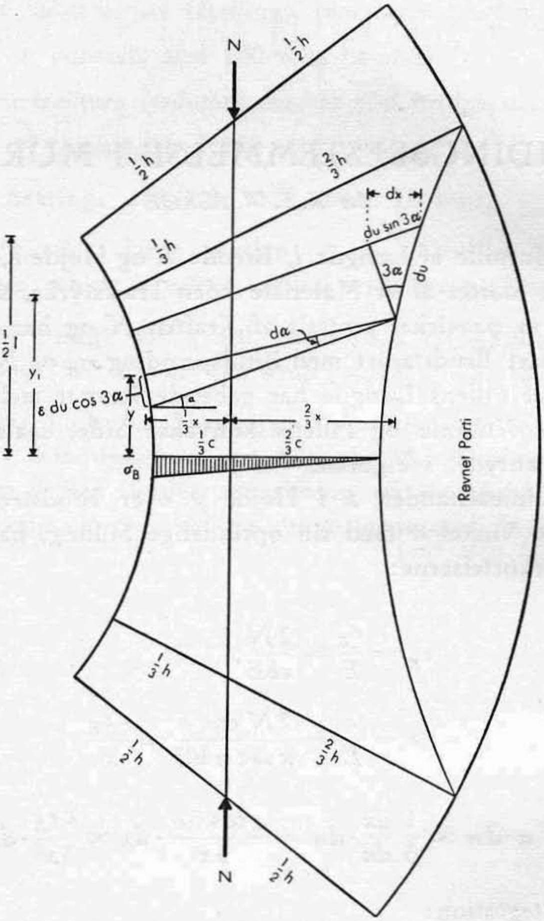
$$\underline{\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_B\left(1-\frac{c}{x}\right)} = \frac{dx}{dy},} \qquad (1\,\mathrm{a})$$

der ved ny Integration giver:

$$\underline{\left(\frac{y}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{6\varepsilon_B}}\left[\sqrt{1-\frac{c}{x}} + \frac{c}{x}\ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{c}{x}}}{\sqrt{\frac{c}{x}}}\right]} \qquad (2\,\mathrm{a})$$

gældende for den revnede Del fra:

til:
$$x = c; \qquad y = 0; \qquad \alpha = 0$$
$$x = h; \qquad y = y_1; \qquad \alpha = \alpha_1.$$



For den urevnede Del har man, naar Midtliniens Udbøjning i et vilkaarligt Snit kaldes *f*, de velkendte Ligninger[1]:

$$f = C \sin y \sqrt{\frac{N}{EI}} + D \cos y \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

$$\alpha = -\sqrt{\frac{N}{EI}} \left[C \cos y \sqrt{\frac{N}{EI}} - D \sin y \sqrt{\frac{N}{EI}} \right]$$

---

[1]) *A. Ostenfeld*: Teknisk Elasticitetslære, 3. Udg. § 59.

eller:
$$f = \frac{h}{6}\cos(y-y_1)\sqrt{\frac{N}{EI}} - \alpha_1\sqrt{\frac{EI}{N}}\sin(y-y_1)\sqrt{\frac{N}{EI}}$$

$$\alpha = \frac{h}{6}\sqrt{\frac{N}{EI}}\sin(y-y_1)\sqrt{\frac{N}{EI}} + \alpha_1\cos(y-y_1)\sqrt{\frac{N}{EI}},$$

hvori:
$$\sqrt{\frac{N}{EI}} = \frac{1}{h}\sqrt{6\frac{c}{h}\varepsilon_B} = \frac{1}{h}\sqrt{6k\varepsilon_B},$$

idet man kalder Forholdet
$$\frac{c}{h} = k.$$

Naar α_1 indsættes efter (1), er herefter
$$f = \frac{h}{6}\cos\frac{y-y_1}{h}\sqrt{6k\varepsilon_B} - \frac{h}{3}\sqrt{\frac{1-k}{k}}\sin\frac{y-y_1}{h}\sqrt{6k\varepsilon_B}$$

eller ved *central Paavirkning*:
$$\operatorname{tg}\frac{y_0-y_1}{h}\sqrt{6k\varepsilon_B} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{1-k}},$$

hvoraf (2 a) giver:
$$\underline{\frac{y_0}{h} = \sqrt{\frac{1}{6\varepsilon_B}}\left[\sqrt{1-k} + k\ln\frac{1+\sqrt{1-k}}{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{1-k}}\right].} \qquad (3\,a)$$

Specielt er herefter:
$$\underline{\alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_B}\cdot\sqrt{1-k}} \qquad (1\,b)$$

$$\underline{\frac{y_1}{h} = \sqrt{\frac{1}{6\varepsilon_B}}\cdot\varphi_1(k)} \qquad (2\,b)$$

$$\underline{\frac{y_0}{h} = \sqrt{\frac{1}{6\varepsilon_B}}\cdot\varphi_2(k),} \qquad (3\,b)$$

hvori Funktionerne har de i Tabellen angivne Værdier.

k	$\sqrt{1-k}$	$\varphi_1(k)$	$\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{1-k}$	φ_2	$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{k}}$
0.0	1.000	1.000	..	1.500	..
0.1	0.949	1.130	..	1.655	..
0.2	0.894	1.183	..	1.731	..
0.3	0.837	1.200	..	1.779	..
0.4	0.775	1.187	..	1.799	..
0.5	0.707	1.148	1.254	1.802	2.220
0.6	0.632	1.080	1.120	1.790	2.028
0.7	0.548	0.978	0.971	1.759	1.879
0.8	0.447	0.832	0.793	1.710	1.758
0.9	0.316	0.611	0.561	1.643	1.656
1.0	0.000	0.000	0.000	1.570	1.570

Da $\varphi_1(k) > 1$ iflg. Tabellen repræsenterer en ret ustabil Ligevægt, bør de undgaas, men man kan da uden alt for stor Fejl sætte:

$$\varphi_1(k) \backsim \sqrt{\pi}\cdot\sqrt{1-k} \text{ og } \varphi_2 \backsim \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{k}}$$

for

$$1.0 > k > \frac{2}{3}.$$

Med Normfaktoren:

$$\varkappa = 10^4 \cdot \frac{\varepsilon_B}{4\pi^2} = \frac{10}{7}$$

er:

$$\varepsilon_B \backsim \frac{\pi^2}{1750} \backsim \frac{\pi^2}{12^3}$$

og:

$$\frac{l}{h} \backsim \pi\sqrt{\frac{1}{6k\varepsilon_B}} = 12\sqrt{\frac{2}{k}} = 12\sqrt{\frac{\sigma_B}{\sigma_A}}, \tag{3c}$$

idet:

$$\frac{1}{2}cb\cdot\sigma_B = hb\cdot\sigma_A = N$$

gældende for $\sigma_A < \sigma_B$, men da er med Normernes Betegnelser[1]:

$$r_E = \begin{cases} r_c & \text{for } l < 12h \text{ (Tetmayer)} \\ r_c\left(\frac{12h}{l}\right)^2 & \text{for } l > 12h \text{ (Euler)} \end{cases}, \tag{4}$$

[1]) Jvf. »Ingeniøren« No. 56, 1936 Formel (2e).

hvilket netop er de i Normerne angivne Udtryk, der altsaa ikke maa opfattes som »Tømrerregler«, men er velbegrundede Formler.

Indsætter man for k i Formel (3c) Værdierne 2, 1, $\frac{2}{3}$ og $\frac{1}{3}$, faar man:

Knusning	efter Tetmajer	for	$0 < l < 12h$
—	— Euler	for	$12h < l < 17h$
—	under Revnedannelse	for	$17h < l < 21h$
—	i ustabil Ligevægt	for	$21h < l < 29h$
—	under Væltning	for	$29h < l < \infty$,

og da Formel (3c) ifølge Tabellen for $k < \frac{2}{3}$ er betydeligt paa den usikre Side, maa Normernes Grænse $l = 35h$ anses for saa dristig, at det vil være rigtigst aldrig at komme over $l = 24h$[1]), selvom muligvis en anden Værdi af $\varkappa$, krum Arbejdslinie, Mørtelens Trækstyrke m. m. gør en Værdi noget over $21h$ forsvarlig.

Ved *excentrisk Paavirkning af urevnet Tværsnit* vil man herefter indenfor samme Grænser kunne benytte de sædvanlige Formler for Materiale med Trækstyrke, altsaa f. Eks.[2])

$$\frac{r_b}{r_E} \cdot \frac{N}{F} + \frac{\nu - \alpha}{\nu - 1} \cdot \frac{M}{W} \leqq r_b, \tag{5}$$

hvori r_E bestemmes af (4) og:

$$\nu = \frac{r_c}{\sigma_a} \cdot \left(\frac{12h}{l}\right)^2,$$

idet:

$$\sigma_a = \frac{N}{F}$$

og:

$$\alpha = \begin{cases} -0.250 & \text{ved rektangulær Momentflade} \\ -0.042 & \text{⸗ parabolsk} \quad — \\ +0.167 & \text{⸗ trekantet} \quad — \\ +0.375 & \text{⸗ parabeltrekantet} \quad — \end{cases}$$

eller $\alpha \backsim 0$, naar Udbøjningen er stor i Forhold til Excentriciteten.

[1]) Svarende til $k = 0.5$.

[2]) Jvf. Bygningsstatiske Meddelelser No. 1, 1938/39.

Ved *excentrisk Paavirkning med revnet Tværsnit* giver (2a) i Forbindelse med Tilnærmelsen i (2b):

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{\pi}{6\varepsilon_B}}\sqrt{1-\frac{c}{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{6\varepsilon_B}}\sqrt{1-\frac{\sigma}{\sigma_B}},$$

hvoraf (svarende til $\alpha = 0$)

$$\underline{\sigma = \left[1-\frac{6\varepsilon_B}{\pi}\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]\sigma_B = \left[1-\frac{\pi}{8}\cdot\left(\frac{l}{12x}\right)^2\right]\cdot\sigma_B = \left(1-\frac{1}{\nu}\right)\sigma_B;} \qquad (2c)$$

eller (mere almengyldigt):

$$\underline{\frac{\nu-\alpha}{\nu-1}\cdot\sigma_k \leq r_b,} \qquad (6)$$

hvori[1])

$$\underline{\nu = \frac{8}{\pi}\cdot\left(\frac{12x}{l}\right)^2 > 2}$$

og

$$\sigma_k = \text{Kantspændingen.}$$

Formel (5) gælder indtil:

$$\frac{r_b}{r_E}\cdot\sigma_a = \frac{\nu-\alpha}{\nu-1}\cdot\sigma_b$$

og:

$$\frac{r_b}{r_E}\cdot\sigma_a + \frac{\nu-\alpha}{\nu-1}\cdot\sigma_b = \frac{\nu-\alpha}{\nu-1}\cdot\sigma_k = r_b,$$

hvori:

$$\nu = \frac{r_b}{\sigma_a}\cdot\left(\frac{12h}{l}\right)^2,$$

saaledes at de 2 Formler i Grænsen kun dækker hinanden, naar

$$\frac{r_b}{\sigma_a} = \frac{8}{\pi},$$

men dette er ganske naturligt, idet Tabellen viser, at (5) undertiden er lidt paa den usikre Side, medens (6) samtidig er lidt paa den sikre Side, saaledes at det i ν maa foretrækkes at bruge Faktoren $\frac{8}{\pi}$ i St. for $\frac{r_b}{\sigma_a}$, naar Tværsnittet er revnet, selvom Forskellen som Regel er uden Betydning[2]).

[1]) Svarende til $k = 0.5$.
[2]) Taleksempel se »Ingeniøren« No. 9, 1939.